5.1 交换环;积分域 2021年8月3日11点00分

5.1.1定义. 令R是一个具有两个二元操作定义的集合,分别被称为加法()和乘法().如果

其中.则我们说对于加法和乘法,**分配律**成立.

5.1.2定义. 令R是一个具有两个二元运算定义的集合,分别被称为**加法**()和**乘法**().如果下列属性成立:

R在加法下是阿贝尔群；

乘法是结合和交换的；

R具有乘法单位元素；

分配律成立.

则R在这两个二元运算上被称为交换环.

5.1.2’(定义5.1.2的展开版本) 令R是一个具有两个二元运算定义的集合,分别被称为**加法**()和**乘法**().即，下列条件必须满足

闭包: 如果,则和和积是R中良好定义的元素.

如果下列属性成立，则R在这两个二元运算上被称为交换环.

结合律: 对所有,

交换律: 对所有,

分配律: 对所有,

单位元素：集合R包含一个元素0，被称为**加法单位元素**，使得所有,

集合R包含一个元素1,被称为乘法单位元素，使得所有,

加法逆: 对每一个,方程

在R中有一个解，称为a的加法逆，记为.

5.1.3定义. 设S是一个交换环.如果S的一个子集R是S的加法和乘法下的交换环,并且与S具有相同的单位元,则称为S的**子环**.

5.1.4命题. 令S一个交换环，并且令R是S的一个子集.则R是S的一个子环当且仅当

R在加法和乘法下是一个闭包;

如果,则;

R包含S的单位元素.

5.1.5 定义. 令R为交换环.令,如果存在元素使得,则元素称为**可逆**.在这种情况下,元素a也称为R的**单位**,元素b称为a的**乘法逆元**,通常用表示.

元素使得对于某些称为**零的除数**.

5.1.6命题. 令R为交换环.则R的单位集合是R的乘法下的阿贝尔群.

5.1.7定义. 令R为交换环,如果且对于所有,

则R被称为**整环[integral domain]**.

5.1.8定理. 域的任何子环都是整环.

5.1.9定理. 任何有限整环都必须是域.

5.2 环同态 2021年8月3日18点21分

5.2.1定义. 令R和S是交换环.一个函数如果满足下列条件,则被称为**环同态**

,对所有成立;

,对所有成立;

.

双射环同态称为**环同构[ring isomorphism]**.如果存在从R到S的**环同构**,我们说R与S**同构**,并写为.从交换环 R 到其自身的环同构称为 R 的**自同构[automorphism]**.

5.2.2命题.

环同构的逆是环同构.

两个环同构的合成是环同构.

5.2.3命题. 令是一个环同态.则

;

,对所有成立;

是S的一个子环.

5.2.4定义. 令是一个环同态.集合

被称为的**核**,记为.

5.2.5命题. 令是一个环同态.

如果且,则,,和属于.

同态是同构当且仅当且.

5.2.6定理(环的基础同态定理). 令是一个环同态.则.

5.2.7命题. 令和S是交换环,令是一个环同态,并且令是S的任意元素.则存在一个唯一的环同态使得对所有成立,且.

5.2.8命题. 令是交换环.由(其中)构成的元的集合在下列加法和乘法下是一个交换环:

5.2.9定义. 令是交换环.由(其中)构成的元的集合在逐分量加法和乘法下被称为环的直接和[direct sum],记为

5.2.10 定义. 令R为交换环.满足的最小正整数n称为R的特征[characteristic],用表示.如果不存在这样的正整数,则称R具有**特征零**.

5.2.11命题. 一个整环具有特征0或,其中是某个质数.

5.3 理想和因数环 2021年8月4日19点16分

5.3.1定义. 令R是一个交换环.R的一个非空子集如果满足下列条件则被称为**理想**

对所有成立

对所有和成立.

5.3.2命题. 令R是一个交换环且.则R是一个域当且仅当它没有适当的非零理想.

5.3.3定义. 令R是一个交换环,令.则理想

被称为由a生成的主理想,记为.

每个理想都是主理想的整环称为主理想环.

5.3.4命题. 令I是交换环R的一个理想.则通过

定义在阿贝尔群上的操作是一个二元操作.

5.3.5定理. 如果I是交换环R的一个理想,则在下列操作

上的定义是一个交换环.

5.3.6定义. 令I是交换环R的一个理想.环称为R模I的因子环.

5.3.7命题. 令I是交换环R的一个理想.

自然投影定义为,,是一个环同态,且.

的理想与包含I的R的理想之间存在一一对应的关系.该对应关系定义如下:对于的每一个理想J,我们分配R理想的;对于包含I的R的每一个理想J,我们分配的理想.

5.3.8 定义. 设I是交换环 R 的真理想.对于所有,如果蕴含或为真,则I被称为素理想.如果R的所有理想J使得蕴含或为真,则I被称为R的极大理想.

5.3.9命题. 令I是交换环R的一个真理想.

因子环是一个域当且仅当I是R的极大理想

因子环是一个整环当且仅当I是R的素理想.

如果I是一个极大理想,则它是一个素理想.

5.3.10定理. 主理想环的每个非零素理想都是极大的.

5.4 商域

5.4.1引理. 令D是一个整环,令

定义W上的关系: 如果则,则是一个等价关系,

5.4.2定义. 令D是一个整环.则具有等价关系: 如果则的集合

等价类记为.所有这些等价类的集合记为.

5.4.3引理. 令D是一个整环.通过下列公式在上定义二元运算和:

其中.则和在上是良好定义的.

5.4.4定理. 设D是一个整环.那么是一个包含与D同构的子环的域.

5.4.5定义. 设D是一个整环.定义5.4.2所定义的域称为D的商域或分数域.

5.4.6定理. 令D为整环,令是由定义的环同态,其中.如果是从D到域F的任意一对一环同态,则存在唯一的环同态是一对一并且满足.

5.4.7推论. 令D是一个整环,且同时是域F的子环.如果F的每个元素都具有有形式,其中,则F同构于D的的商域.

5.4.8推论. 对于某些素数p,任何域都包含与或同构的子域.